

专题 7: 曲率

教授: 陈宝权

作者: 刘添翼 魏智德 颜坤

免责声明: 该笔记尚未进行正式出版物的通常审查, 未经教师允许不能向课程外分发.

7.1 曲率

7.1.1 二维平面上曲线的曲率

曲线的曲率 (curvature) 就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率, 表明曲线偏离直线的程度, 是数学上表明曲线在某一点的弯曲程度的数值。曲率越大, 表示曲线的弯曲程度越大。

定义 7.1 (平均曲率) 二维平面上的弧 \overline{PQ} 的切线转角 $\Delta\alpha$ 与该弧长 Δs 之比的绝对值称作该弧的平均曲率, 记作 $\overline{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$ 。

定义 7.2 (曲率) 当 Q 沿曲线 L 趋向于 P 时, 若弧 \overline{PQ} 的平均曲率的极限存在, 则称此极限为曲线 L 在点 P 处的曲率, 记作 K , 即 $K = \lim_{Q \rightarrow P} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$ 或 $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$

曲率的倒数就是曲率半径。

定理 7.3 在原始的 xy 坐标系中, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 点的曲率

$$K(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

定理 7.4 对于参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 确定的曲线, 曲线在 t 点的曲率

$$K(t) = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}$$

7.1.2 三维空间内曲线的曲率

对于空间曲线上的一点 P , 考虑其切线方向单位向量 T , 法方向 (ΔT 的方向, 即 T 的变化方向) 的单位向量 N , 以及与它们垂直的方向的单位向量 $B = T \times N$ 。

将 T 、 N 、 B 均视为曲线长度的函数。为了研究这三个单位向量的变化情况, 我们可以尝试补全下述式子中空缺的矩阵 P :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \text{ 下面记 } Q = \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

由 N 的定义, N 的方向为 T 的变化方向, 一定存在常数 k , 使得 $\frac{dT}{ds} = kN$ 。

由于 Q 是正交矩阵, 所以上式可化为 $\frac{dQ}{ds} \cdot Q^T = P$ 。

又由于 $Q \cdot Q^T = I$, 有 $0 = \frac{dI}{ds} = \frac{dQ}{ds} \cdot Q^T + Q \cdot \frac{dQ^T}{ds}$,

所以有 $P = \frac{dQ}{ds} \cdot Q^T = -Q \cdot \frac{dQ^T}{ds} = -(\frac{dQ}{ds} \cdot Q^T)^T = -P^T$, 也即 P 为反对角矩阵。

$$\text{所以 } P = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \tau = \langle \frac{dN}{ds}, B \rangle。$$

7.1.3 三维空间内曲面的曲率

定义 7.5 (主曲率) 过曲面上某个点上具有无穷条曲线, 其中存在一条曲线使得该曲线的曲率为最大, 记为 K_{\max} , 存在一条曲线使得该曲线的曲率为最小, 记为 K_{\min} 。称这两个曲率为主曲率。

显然由于我们所考虑的二维曲面在局部与平面微分同胚, 故通过线性组合的方法可以证明最大曲率及其方向和最小曲率及其方向都可以视作一个 2×2 矩阵的特征值和特征向量, 故最大曲率对应的曲线在该点对应的切线方向与最小曲率对应的曲线在该点对应的切线方向垂直。

定义 7.6 (平均曲率) 曲面上一点的平均曲率是该点主曲率 K_{\max} 和 K_{\min} 的平均值。也即 $H = \frac{K_{\max} + K_{\min}}{2}$ 。

定义 7.7 (高斯曲率) 曲面上一点的高斯曲率是该点主曲率 K_{\max} 和 K_{\min} 的乘积。也即 $K = K_{\max} \cdot K_{\min}$ 。

定理 7.8 如果 x 是二维曲面 $w = w(u, v)$ 上的一点, 该点的 *Hessian* 矩阵

$$H(u, v) = \begin{pmatrix} w_{uu} & w_{uv} \\ w_{vu} & w_{vv} \end{pmatrix}$$

则 $H(u, v)$ 的两个特征值分别为 K_{\max} 和 K_{\min} 。

高斯曲率 $K = \det H(u, v)$ 。

7.2 外代数

7.2.1 外积和微分形式

定义 7.9 (微分形式) 定义 $fde_1 \wedge de_2 \wedge \cdots \wedge de_r$ 为 r 次微分形式, 其中 f 是函数。

例: fdx 是一次微分形式, $fdx \wedge dy$ 是二次微分形式。

外积运算的性质:

1. 线性性: $(aw_1 + bw_2) \wedge w = aw_1 \wedge w + bw_2 \wedge w$
2. 反称性: $w_1 \wedge w_2 = -w_2 \wedge w_1$

从反称性可以推出 $dx \wedge dx = 0$ 。

7.2.2 外微分

定义 7.10 (外微分) 设 $w = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n f_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 r -次微分形式, 令

$$dw = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n df_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$r+1$ -次微分形式 dw 称为 r -次微分形式 w 的外微分。

外微分运算的性质:

1. 线性性: $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$
2. Leibniz 法则: 如果 w_1 是 r 次微分形式, 则对于任意微分形式 w_2 , 成立

$$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2$$

3. 对于任意微分形式 w , 成立 $d^2w = 0$

定理 7.11 (高斯绝妙定理) 如果一个曲面弯曲而没有拉伸, 表面的高斯曲率就不会改变。换句话说, 高斯曲率可以通过测量表面本身上的角度, 距离和速率来完全确定, 而无需进一步参考表面嵌入环境三维欧几里得空间中的特定方式。因此, 高斯曲率是表面的固有不变量。(高斯曲率是内蕴的, 可以作为局部曲面的一个签名)

注: 平均曲率和高斯曲率在刚体变换中都是保持不变的, 但是把一张纸折成一个圆柱后, 最大曲率显然变成了圆柱的半径, 不再是 0, 所以平均曲率不是内蕴的。

证明: 我们接下来都针对曲面上每一个点高斯曲率内蕴给出证明。

首先我们在每一个局部都可以把曲面看成其微分同胚的平面, 因此可以用两个方向将其参数化, 记这两个方向为 u, v , 那么我们可以得到曲面上一点的位置向量 r 对这两个方向变化的导数 r_u, r_v , 同理, 我们记这点在三维背景欧氏空间中对应的向量为 n , 我们也能得到其对这两个方向的导数 n_u, n_v , 经过简单的计算可以得到高斯曲率 K 总可以表示成 $K = \frac{|n_u * n_v|}{|r_u * r_v|}$ (直观地想象: 当我们选取 u, v 分别为最大曲率和最小曲率对应的方向时, 由于它们互相垂直, 直接就能把这个式子拆成最大曲率乘最小曲率, 其余情况只需要讨论局部坐标变化 (不一定正交, 但一定非退化) 时这个式子的值保持不变即可)

其次, 我们在曲面的这点附近找到两个互相垂直的切方向 e_1, e_2 , 显然这两个方向的选取是内蕴的。(可以参看陈维桓《微分流形初步》), 我们记这点的法向量为 e_3 , 从而我们在这一点局部得到一个正交标架, 和之前对三位曲率的论述类似, 我们得到一个关于 de_1, de_2, de_3 与 e_1, e_2, e_3 关系的 3×3 反对称矩阵, 故对角线为 0, 我们记这个矩阵第 i 行第 j 列的元素为 ω_{ij}

定义 $dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, 又因为 $dr = r_u du + r_v dv$, 从而 $\omega_1 = \langle r_u, e_1 \rangle du + \langle r_v, e_1 \rangle dv$, $\omega_2 = \langle r_u, e_2 \rangle du + \langle r_v, e_2 \rangle dv$

因此, 由外微分的性质, 高斯曲率可以表示为 $K = \frac{\omega_{31} \wedge \omega_{32}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$

因为 $d^2(e_1) = 0, d(e_1) = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3$, 我们可以推出 $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$

故高斯曲率 $K = \frac{-d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$ 是内蕴的。

(因为 $\omega_{12} = \frac{d\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \omega_1 + \frac{d\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \omega_2$ 是内蕴的)

■

7.3 里奇流、庞加莱猜想与代数几何

该部分为拓展内容, 在最后的参考文献中给出了推荐书目, 课上讲的论文《Manifold splines with a single extraordinary point》展示了里奇流的运用与三角剖分的漂亮结合, 感兴趣的同学可以参考。

7.4 应用——医学配准

7.4.1 什么是医学配准

医学图像配准是指对于一幅医学图像寻求一种 (或一系列) 空间变换, 使它与另一幅医学图像上的对应点达到空间上的一致。这种一致是指人体上的同一解剖点在两张匹配图像上有相同的空间位置。配准的结果应使两幅图像上所有的解剖点, 或至少是所有具有诊断意义的点及手术感兴趣的点都达到匹配。

7.4.2 配准问题的微分几何形式

给定三维欧氏空间的两个嵌入流形, $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$, 给定初始映射 $\varphi_0: S_1 \rightarrow S_2$, 求两个流形间的微分同胚 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, 这个微分同胚和初始微分同胚同伦, $\varphi \sim \varphi_0$, 满足一定的限制条件, 例如将特征点映到相应的特征点, $\varphi(p_i) = q_i$, $p_i \in S_1$, $q_i \in S_2$, $i = 1, 2, \dots, k$; 同时优化某种能量 $E(\varphi)$ 。形式上问题可以表述为:

$$\min_{\varphi} \{E(\varphi) | \varphi \in \text{Diff}(S_1, S_2), \varphi \sim \varphi_0, \varphi(p_i) = q_i, \forall i\}$$

7.4.3 上述形式存在的问题

- 证明问题解的存在性, 唯一性, 稳定性和正则性在理论上存在困难。
- 通常泛函空间-流形间的微分同胚空间 $\text{diff}(s_1, s_2)$ 本身并没有紧性
- 能量需要由凸性 (依赖于流形本身的性质)
- 几何限制条件 (如特征点映射到特征点) 往往难以表达为解析形式

7.4.4 解决方法

比较常用的是基于共形几何 (conformal geometry) 的内蕴方法, 这种方法只依赖曲面的黎曼度量, 不需要曲面的嵌入。核心方法如下: 首先我们用单值化定理 (uniformization) 将曲面映射到标准空间中 (根据曲面的拓扑, 高斯曲率有三种选择 +1, 0, -1, 对应的标准空间为单位球面, 欧氏平面和双曲平面, 如图 3 所示。曲面单值化可以用曲面黎奇流方法得到)。 $\varphi_k: S_k \rightarrow \mathbb{D}$, $k = 1, 2$; 其次, 我们在标准空间中寻找最优微分同胚, $\bar{f}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$; 最后, 曲面间的微分同胚由复合映射给出, $f = \varphi_2^{-1} \circ \bar{f} \circ \varphi_1: S_1 \rightarrow S_2$ 。

7.5 Reference

陈维桓 《微分流形初步》

顾险峰 《Computational Conformal Geometry》

Miles Reid 《Undergraduate Algebraic Geometry》