前沿计算研究实践（II） **2019 年春季**

专题 7：Laplace and Poisson

教授：陈宝权 作者：颜开 于博涵 冉德智 凌弘毅 姚贺源 陈洋

免责声明：该笔记尚未进行正式出版物的通常审查，未经教师允许不能向课程外分发.

7.1 问题引入

这一章所讲的 Laplace 和 Poisson 方程，在图形学中对应的基本问题是：给定一张图像，有一些区域的信息缺失了，希望能尽量自然的补全。

出于两个理由，我们认为上述问题中的“自然”，意味着让补全的区域尽量平滑。其一，现实生活中的物体具有空间上的局部性，物体相邻的部分有很大概率具有结构上的一致性；其二，由奥卡姆剃刀原则，我们仅能使用现存的图像的信息做推断，故不应该认为图像缺失区域内部存在突变。

类比物理中的热传导方程，如果我们把图像视作炙热的铁板，那么通道灰度就对应温度，分布光滑就意味着温度达到了热平衡。而我们知道，由导热定律，单位时间传递的热量（能流密度）和温度差成正比；达到热平衡时，每个点的热量流入等于流出。于是令 f(x,y) 表示这一点处的温度，我们得到 (f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1))/4=f(x,y)，实际上就是离散情况下的 Laplace 方程。下面我们将这种直觉严格化。

7.2 数学基础

首先考虑连续情形。一般来说，我们用梯度来衡量场在一点的变化速率；如果相同大小且边缘差距相同的区域，变化速率很大，意味着内部必然非常不“光滑”。于是原问题等价于以下优化问题：

$$argmin_f = \iint_\Omega \|\nabla f\|^2$$

s.t.

$$f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega}$$

所谓“光滑”，就意味着待补全区域上梯度的 L_2 范数的积分最小。一般认为，实际应用中研究的函数都具有很好的性质；于是不妨假设下面提到的所有函数都是二阶连续可微的。此外，该优化问题的限制条件被称为 Dirichlet 条件，它表明我们知道缺失区域边缘的图像信息；类比之前提到的铁板，相当于周围的边界是已知恒温的。

原书在这里为了将该问题规约到解 Lagrange 方程，引入了变分法与 Euler-Lagrange 公式。有兴趣的同学可以参考我们的 slides 自行学习，在这里就不再重复。下面我们介绍一种相对初等、只需要数学分析相关知识就能将问题规约到 Lagrange 方程的方法：狄利克雷原理。

7.2.1 调和函数与狄利克雷原理

7.2.1.1 调和函数

定义：满足 $\nabla f = 0$ 的函数称为调和函数。

调和函数是一类特别优美的函数，具有良好的平均性质。以下定理和推论应该能在谢惠民的数学分析习题集上找到相应的内容。

定理: 设函数 u 定义在 $D \subset R^2$ 上，D 为区域。u 为调和函数的充分必要条件是对于任意圆盘 $U \subset D$,$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s = 0$

推论 1：调和函数在边界上取得最大（最小值）。

推论 2: 调和函数在被边界上的值唯一确定。

根据推论 1、2，我们可以得到一个非常重要的不等式——狄利克雷不等式的初等证明。

7.2.1.2 由 Dirichlet 不等式得到 Laplace 方程

设 $D \subset R^2$ 上，D 为区域。u 为调和函数，f 为任意满足 $f|_{\partial D} = u|_{\partial D}$ 的函数。那么就有以下不等式成立：

$$\iint_D [u_x^2 + u_y^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D [f_x^2 + f_y^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当且仅当 $u = f$ 时等号成立。

证明：由 Green 第二公式，$\iint_D [u_x^2 + u_y^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} = -\iint_D u \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s$
由于 $\nabla u = 0$, $f|_{\partial D} = u|_{\partial D}$,$\iint_D [u_x^2 + u_y^2] = -\iint_D f \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} f \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s$
逆用 Green 公式得到：$\iint_D [u_x^2 + u_y^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D [u_x f_x + u_y f_y] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
利用 Cauchy 不等式和均值不等式，$RHS \leq \iint_D [u_x^2 + u_y^2]^{\frac{1}{2}} [u_x^2 + u_y^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D \frac{[u_x^2+u_y^2]+[u_x^2+u_y^2]}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
整理就得到了 Dirichlet 不等式。

从定理及其证明过程可以看出，我们待求问题的最优解正是满足给定边值条件（Dirichlet 条件）的调和函数！由于调和函数的值被边界值唯一确定，我们就可以得到唯一的最优解。由于这个函数是调和函数，我们得到作为该函数 f 充要条件的性质：

$$f_{xx}^2 + f_{yy}^2 = 0$$

也就是 Laplace 方程。

7.3 离散情形

由刚才的分析，我们已经得到连续情形下的解是调和函数。在离散情况下，f_{xx}，即 x 的二阶微分，等于 $(f(x+1,y)-f(x,y))-(f(x,y)-f(x-1,y))$; 类似地，$f_{yy} = (f(x,y+1)-f(x,y))-(f(x,y)-f(x,y-1))$. 代入 Laplace 方程，得到

$$(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1))/4 = f(x,y)$$

这也与我们的直觉相符。于是我们只需要解以下线性方程组：

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & \dots \\ & & & \vdots & & & \\ \dots & \dots & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & & | & & I_{K\times K} & \end{array}\right] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} | \\ \operatorname{div} g \\ | \\ \hline c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{array}\right]$$

（实际上，上面的矩阵画得有一些问题，应该做变量的重编号将所有的-4 移到对角线上。）仔细观察不难发现，把上面一些行乘上 -1 系数之后，左边的矩阵是（不严格的）主对角占优矩阵；因此，它是半正定的。结合上一节课讲过的知识，我们可以用下面这些方法解这个矩阵：

(1)GEPP：由于矩阵非常稀疏（每行的非 0 元是常数级别的），所以 Gauss 消元法只需要 $O(n)$ 的时间求解。其中，Pivoting 是为了使主元的绝对值尽可能大，从而减小数值计算中的误差。

(2)Cholesky 分解：由于该矩阵是 SPD（半正定）矩阵，所以可以做 Cholesky 分解。不过，在这里做 Cholesky 分解并不合适，它的时间复杂度是 $O(n^2)$。Cholesky 矩阵更适用于稠密 SPD 矩阵。

(3) 共轭梯度法：大、稀疏而又 SPD 的矩阵可以使用共轭梯度法。它的时间复杂度非常优秀，每一轮迭代的时间复杂度仅为 $O(n)$

(4)MINRES：迭代法的一种，最小化误差项的 L2 范数。它只要求矩阵稀疏对称，但是不要求正定。

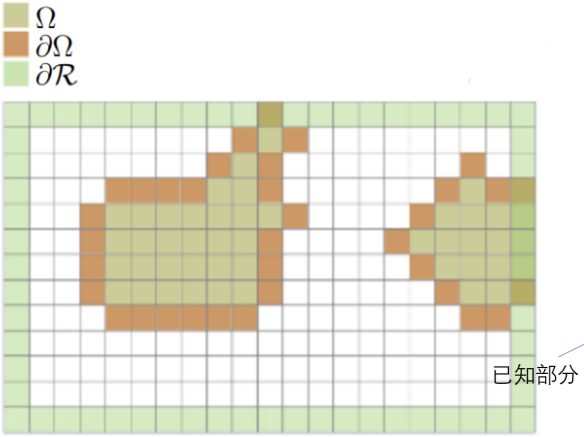

图 7.1: Dirichlet

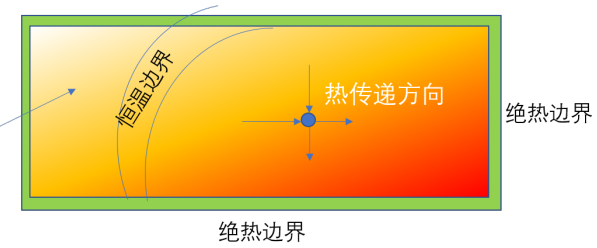

图 7.2: Neumann 和 Dirichlet 的混合应用

7.4 算法实践

7.4.1 算法的边界处理

在问题的引入部分中，我们提到问题的条件为 Dirichlet 条件。然而在具体的算法实践过程中，我们可能遇到这样的情况：问题的边界恰好也是图片的边界。由于图片外无像素点，梯度很大；类比铁板的情况，相当于铁板的边缘在源源不断地向外散发热量。若我们仍然用 Dirichlet 条件去做的话，修补的部分会明显地变黑。

在铁板的例子里，解决问题的方法不难想出：我们只需要在铁板边缘加入一个绝热层，这样就可以避免热量的流失。类比到图片，也就是规定从图片内部到外部的方向导数为 0。这个条件是一种被叫做 Neumann Condition 的限制条件的特殊情况；与 Dirichlet Condition 指定边界值不同，Neumann Condition 指定的是边界法向的方向导数。

想要进一步了解的同学，可以参考 https://www.ipol.im/pub/art/2016/163/article_lr.pdf 这篇文章。

7.4.2 Poisson Editing

虽然我们类比热传导的情况，成功地补全了图片，但是这样的补充并不是完美的，因为我们并没有用上对图片的任何知识。有时候，我们可能对缺失的部分有一些基础的认识；或者甚至，我们希望在补全部分强行注入以前不存在的信息。我们能否在补全时使用上这些知识呢?

答案是肯定的。我们把优化的目标进行一下更改。

$$\arg\min_f \iint_\Omega \|\nabla f - g\| \qquad s.t. f|_{\partial\Omega} = f^*|_{\partial\Omega}$$

其中 g 是我们对图片缺失部分信息的体现，在优化过程中它会指导填充；一般我们选取 g 是另一张与缺失部分相似图片的梯度。

在具体的实现中，我们可以使用 Opencv 提供的 seamlessClone 函数。注意其默认为使用 Dirichlet 条件，没有实现 Neumann 条件的补全。

```
void seamlessClone(InputArray src, InputArray dst, InputArray mask, Point p, OutputArray blend, int flags)
```

图 7.3: OpenCV 的 seamlessClone 函数

显然，这个函数也可以用于 Laplace Editing, 因为 Laplace Editing 实际上就是 Poisson Editing 的一个特殊情况，我们只需要令 $g = 0$，即用一张纯色图片做 Poisson Editing 即可。

7.4.3 Poisson Editing 的一些问题

在使用 Laplace 补全的过程中，我们会发现用 Laplace 补全的图片会显得比较模糊，因为我们在优化时在努力地让补全部分的梯度变小。而这一点在一些信息比较多 (梯度本应比较大) 的地方就显得难以接受了。

下面的图片是我们使用 Laplace 补全的图片，能明显地看到由于缺失部分的信息很密集，补全后与原图片的差异比较大。

图 7.4: Laplace 补全的图片

此外，由于补全时我们需要参考边界条件，当我们使用 Poisson 进行图片补全时，如果两张图片的颜色有着显著差异，补全时填充部分的颜色会随着背景变化，如果差异过大，会导致填充图片的色调出现问题。如果填充部分本来就应该和背景色调一致（例如，游泳池里的人头），这无可厚非；但如果填充部分是一个与背景相对独立的物体（比如，下面图片中的大鱼），就会产生图像失真的情况。这方面的改进尝试可以参考 SIBGRAPI 在 2016 年的一篇文章 Independent Color-Channel Adjustment for Seamless Cloning based on Laplacian-Membrane Modulation，但它也只是一个工程上的补救措施。Poisson Editing 的以上问题可以说几乎是与生俱来的。

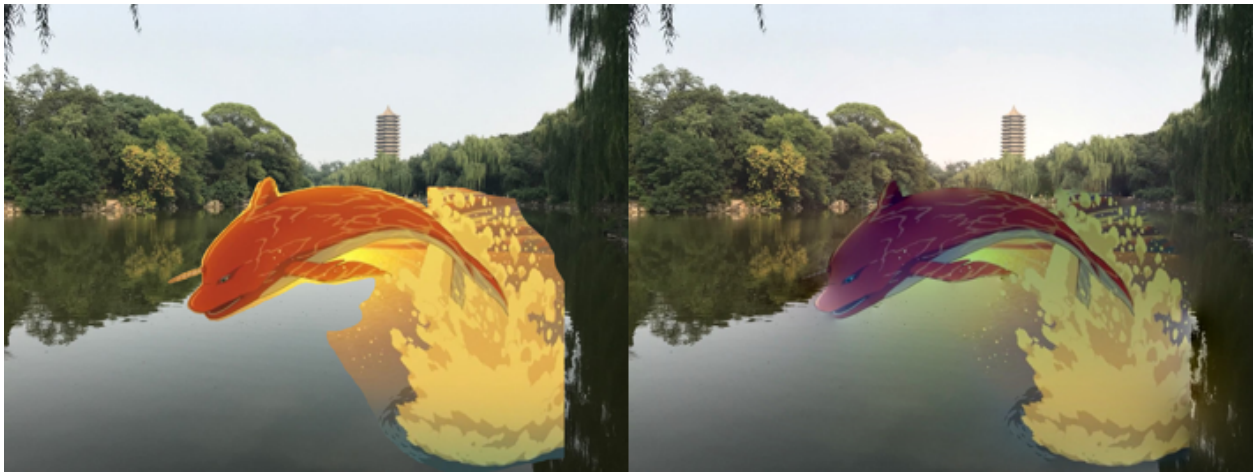

图 7.5: 做过 Poisson Editing 的图片

7.4.4 其他应用

有时，我们会希望从图像上去掉一些原有部分。为此，我们只需要将这些部分在原图上“挖去”，然后使用图像补全就可以了。不过，为了使图像更为逼真，现在去除图像部分的操作一般会使用 Exemplar-based 的方法：在图像补全时，每次取图像附近的一小部分做 Poisson Editing 来补全。这就是书上所说的 Healing Brush。

此外，Poisson Editing 也可以用于全景照片的贴合。具体的方法是，先使用 SIFT 算法去识别图像的特征，并将其一一匹配；之后用类似于 Seam Carving 的方法，把图片进行拼接；最后为了处理边缘光线或镜头参数突变带来的不自然情况，再令边缘进行平滑化即可，具体的技术我们在这里就不具体讨论了。

7.4.5 3D Laplace

我们还可以把 Laplace 方法推广到 3D 的情况下。我们有一些固定的格点，希望能够建立一个比较平滑的表面。但此时每个点与其他点的度数不一定是 4，故我们需要对拉普拉斯的形式其进行一定的调整：

$$\Delta(f) = f - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} f_k$$
$$\min_f \int \|\Delta f\|^2 \qquad s.t. f_j = c_j \forall j \in C$$
$$\Delta^2(f) = 0$$

其中，C 是支撑点的指标集，约束条件可以由 Euler-Laplace 方程得到。这样重建得到的表面类似于一层薄膜，在支撑点附近有较高的凸起。

7.5 图像补全领域的发展

早期的研究人员曾想过多种有创意的图像补全方法：

基于灰度等高线：Level lines based disocclusion, ICIP 98’（图像补全的开山之作）

基于 PDE：Strong-continuation, contrast-invariant inpainting with a third-order optimal pde, IEEE TIP 06’

基于边缘探测：Edge-based image restoration. IEEE TIP 05’

基于全局马尔科夫场：Image completion using global optimization, CVPR 06’

基于流体模拟，就是我们这节课主要覆盖的内容

基于张量投票：Robust image synthesis by adaptive nd tensor voting, CVPR 03’

基于范例补全，使用附近最类似的部分辅助补全：Fragment-based image completion, SIGGRAPH 03’; Similarity based image inpainting method, MMM 06’

然而这些方法在 07 年之前都进入了瓶颈，他们的共同特点就是忽略了图片的语义。

为了能够利用图片的语义补全图像，在深度学习的时代之前，人们想出了基于图片分类的方法。其中，最具有代表性的论文，是发表在 SIGGRAPH 2007 的一篇论文：Scene Completion Using Millions of Photographs。它建立了基于语义的图片数据库，补全时在其中搜索与待补全图片最接近的图片，之后从这些接近的图片中抠出一部分进行 Poisson 编辑, 就可能出现语义上的补全。

现代图像补全的主要手段是 CNN+GAN。不过应当指出的是，之所以人们可以对 CNN+GAN 做合理的设计，正是因为其底层有上面提到的这些基础模型作为依据。下面是几篇 CNN+GAN 的图像补全的论文，可供参考：

Context Encoders: Feature Learning by Inpainting, CVPR 16’

High-Resolution Image Inpainting using Multi-Scale Neural Patch Synthesis, CVPR 17'

On-Demand Learning for Deep Image Restoration, ICCV 17'

Globally and Locally Consistent Image Completion, SIGGRAPH 17'

Image Inpainting for Irregular Holes Using Partial Convolution, ICLR 18'

Contextual-based Image Inpainting, ECCV 18'