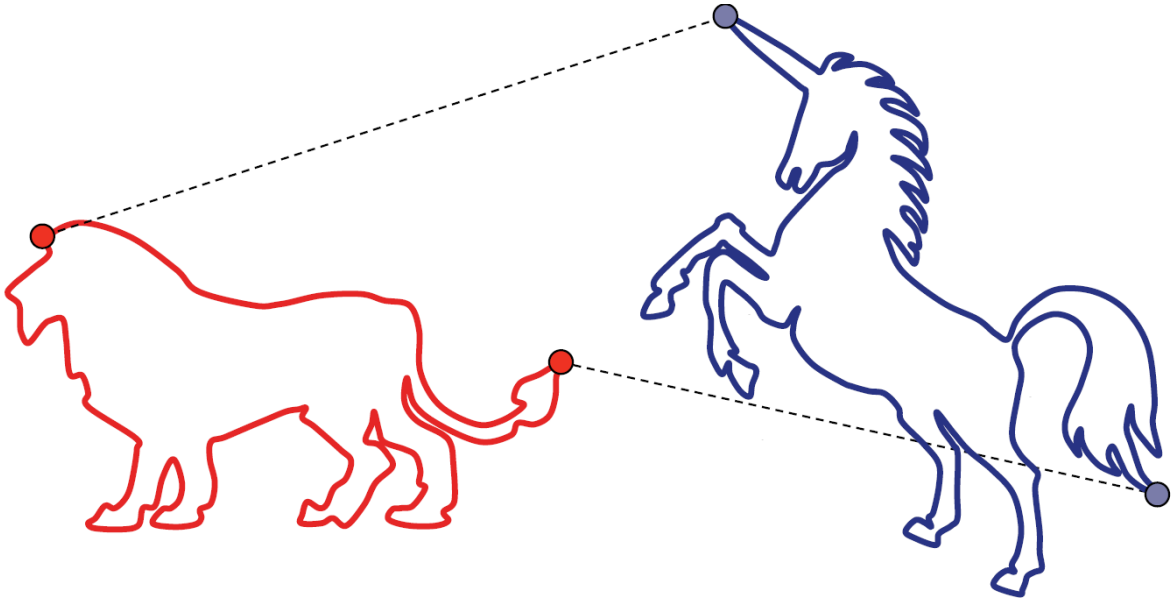
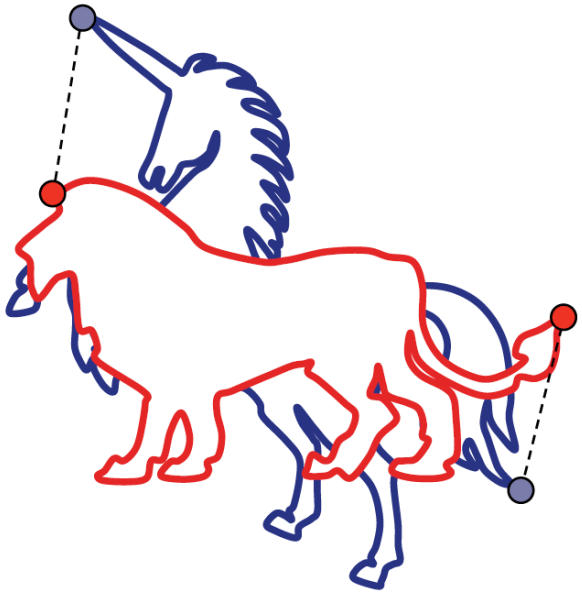
# 线性代数

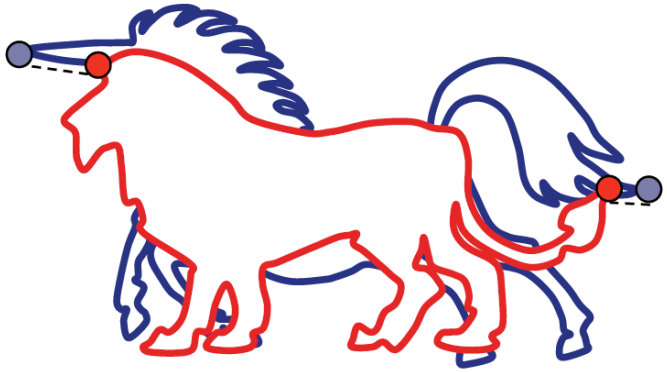
周子鑫

2019 年 2 月 27 日





translation only



including rotation

Section 1

# 基本概念

## Definition 1 (线性空间)

在域 $F$ 上的**线性空间**是一个非空集合 $V$，上面有加法运算 $+: V \times V \to V$ 和数乘运算 $\cdot: F \times V \to V$，满足以下性质：

1. $V$ 在 $+$ 下构成阿贝尔群。(加法群的单位元记为 $\mathbf{0}$)
2. 点积和 $F$ 上加法可以互换: $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (ab) \cdot \mathbf{u}$
3. 点积的单位元: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $1$ 是 $F$ 乘法单位元。
4. 对向量的分配律: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
5. 对 $F$ 上加法的分配律: $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

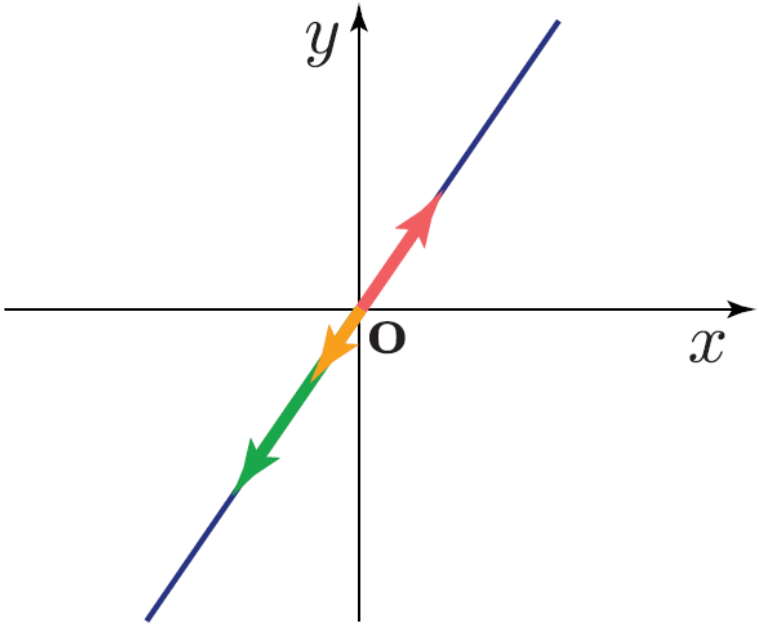
## Definition 2 (线性子空间)

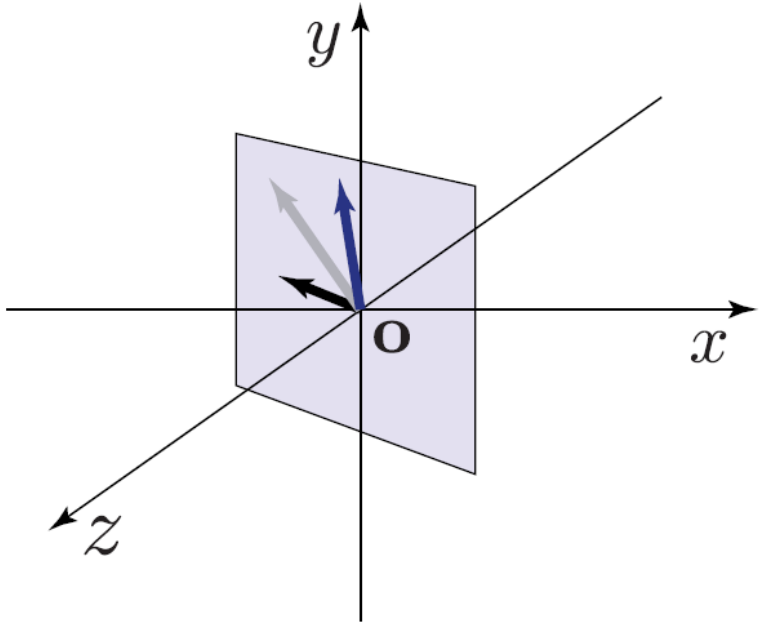
若 $W$ 和 $V$ 是线性空间且 $W \subseteq V$，称 $W$ 为 $V$ 的**子空间**当以下条件被满足：

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
2. $\forall \mathbf{u} \in W, a \in F, a\mathbf{u} \in W$

**线性子空间总是包含 0**

在图形学中常常被用到的 $xy$ 平面和 $xyz$ 三维空间都是线性空间的简单例子。在 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的一条直线是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，或者都在 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。



## Definition 3 (线性无关)

**向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 被称为线性无关当**

$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$

考虑一个线性无关的集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. 根据定义，线性无关意味着 $\mathbf{0}$ 只能被这个集合唯一表出。更一般的，我们可以证明如果 $\mathbf{w}$ 可以被这个集合表出，那么表出方式一定是唯一的。另外，我们可以证 $\forall i, \mathbf{v}_i$ 不能被这个集合中其他向量表示出来。

我们可以进一步定义 $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ 表示所有能被 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 表出的向量集合，它是全空间的一个子空间。

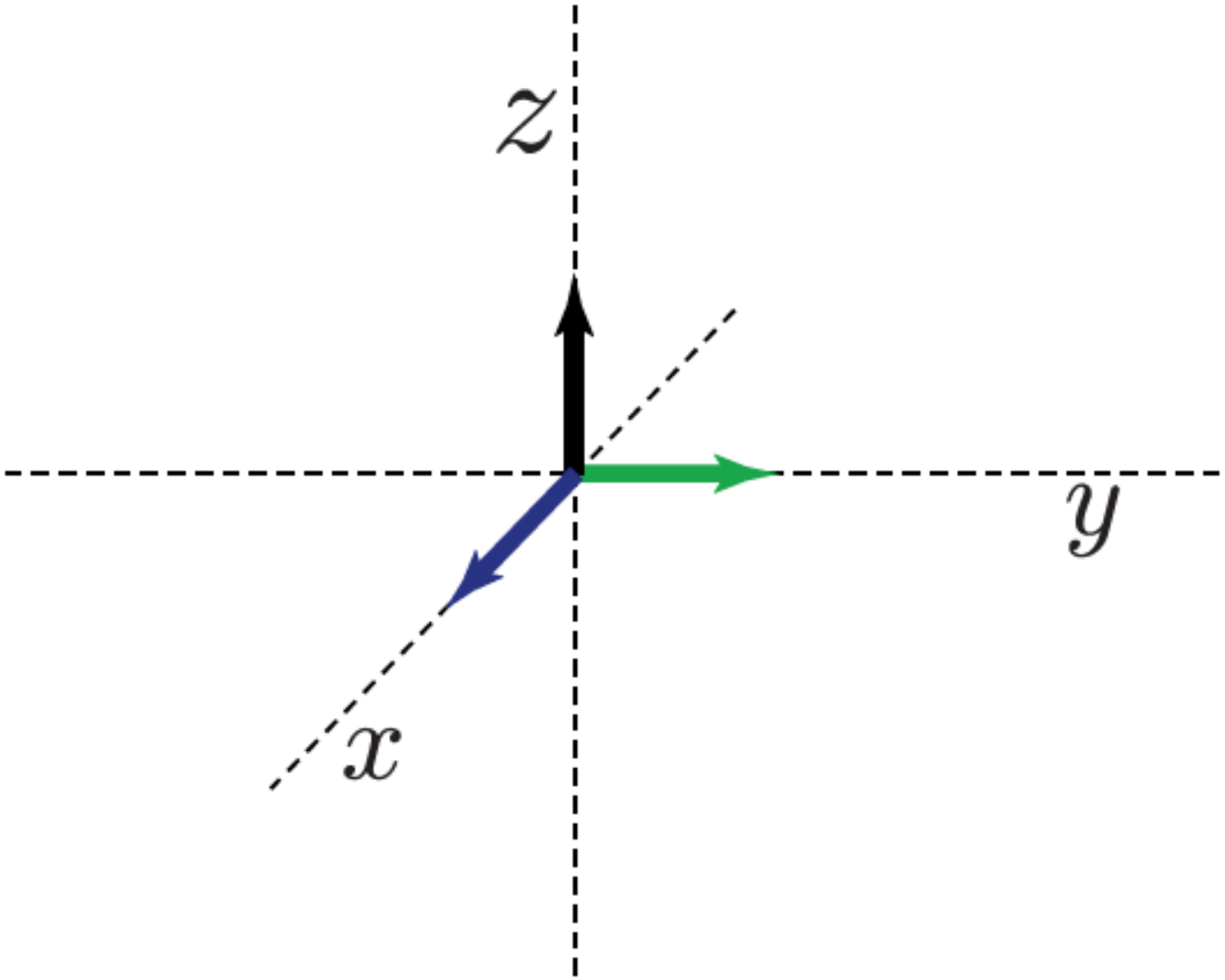
## Definition 4 (基，维度和坐标)

线性空间 $V$ 的一组**基** $B$ 是指 $V$ 中的极大线性无关集合

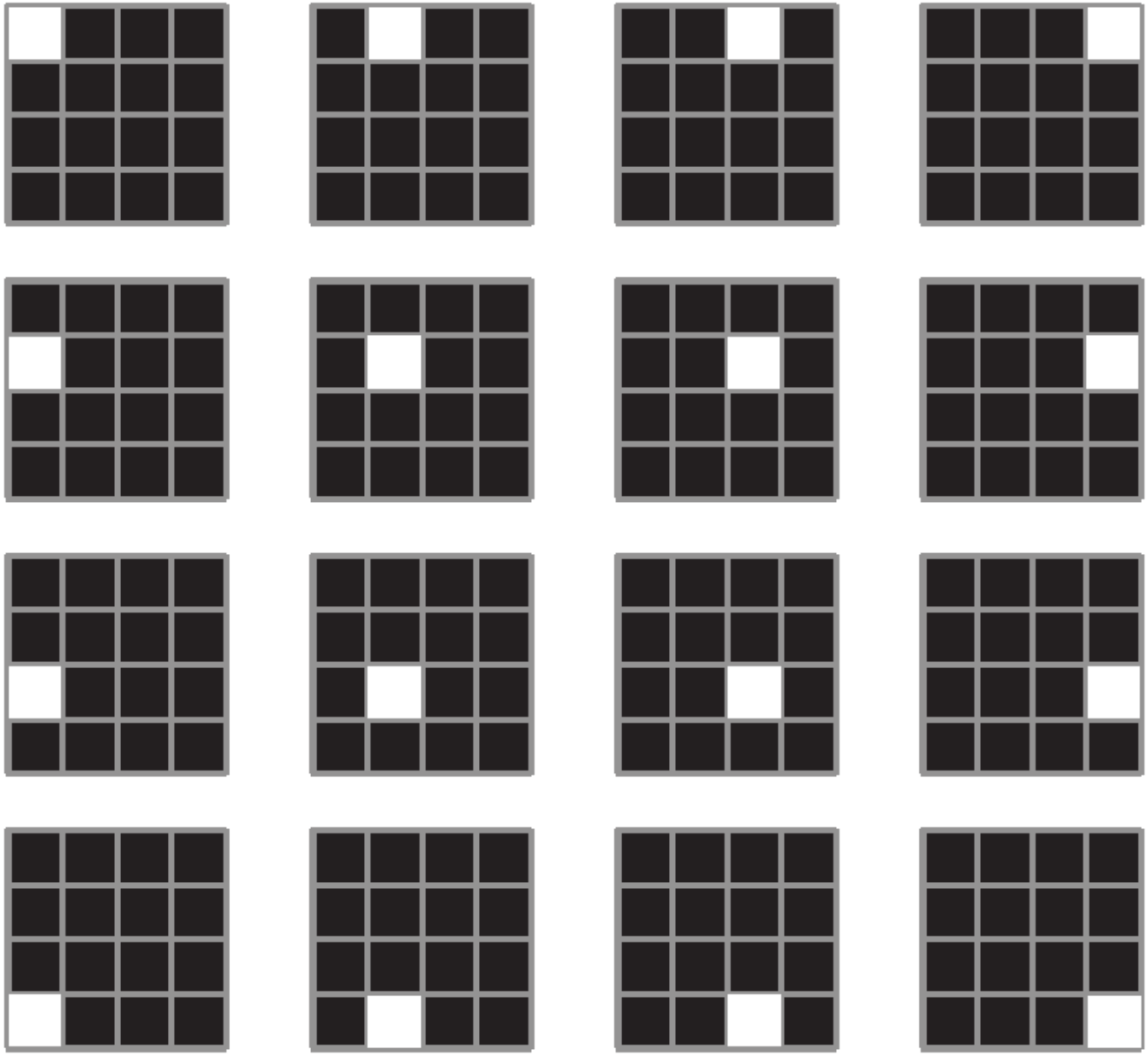
线性空间 $V$ 的**维度**就是基集合的大小。(可以证明所有基集合大小相同)

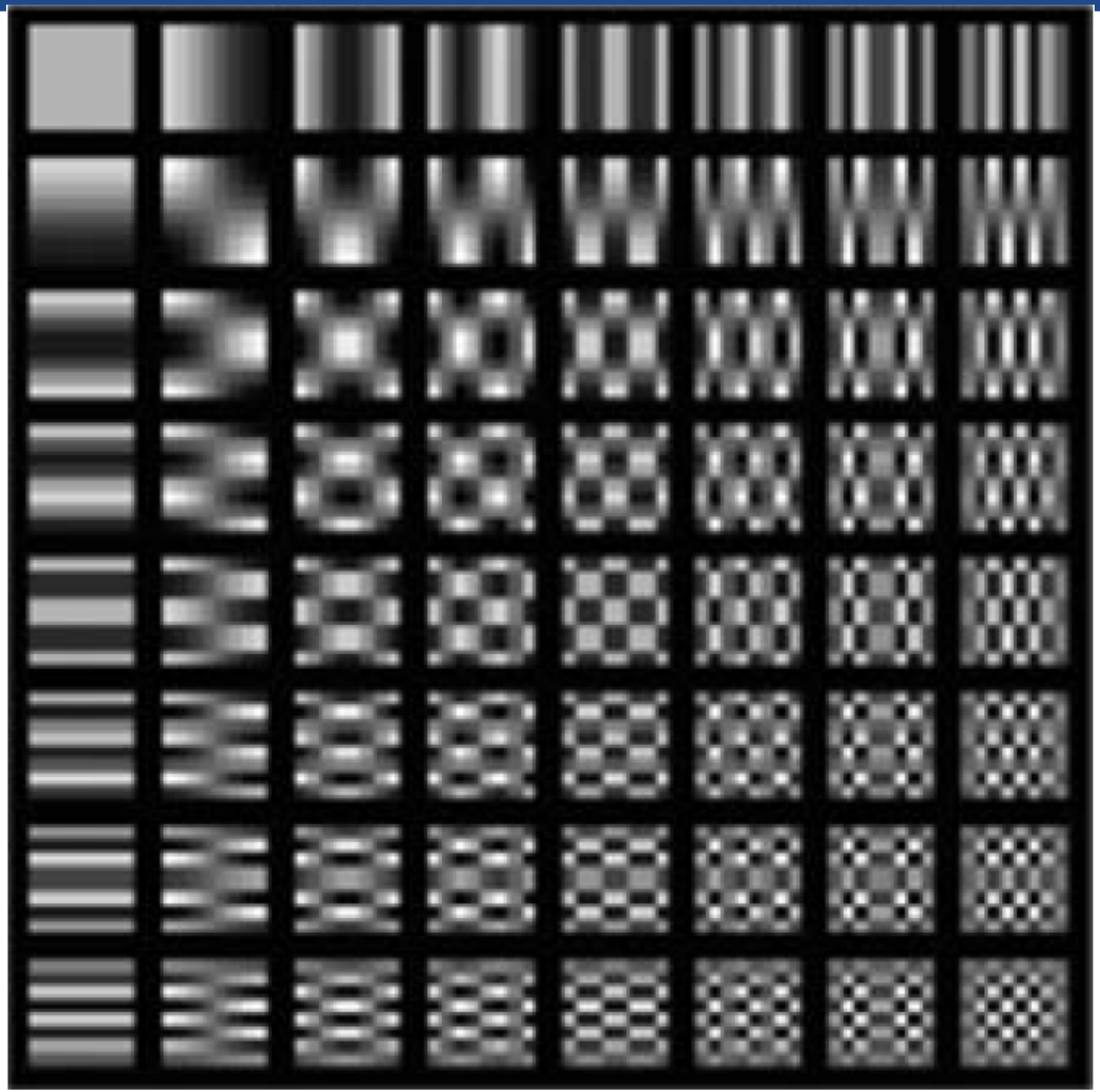
一个向量 $\mathbf{w} \in V$ 在基 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 下**坐标**是一组有序的系数 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$，满足 $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k\mathbf{v}_k$.(这个系数是唯一的)

对于基这个概念，一个简单的例子就是在 $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，这个基被叫做标准基。



当然，一些线性空间和基底的组成可能有些不太一样。比如，一个 $N \times M$ 的灰度图可以描述成 $\mathbb{R}^{nm}$ 中的一个向量，我们把每个像素的灰度作为他的坐标。这个坐标对应了 $\mathbb{R}^{nm}$ 中的标准基。





## Definition 5 (内积, 正交, 正交基)

两个向量的 **v** 和 **w**，假设他们的坐标分别是 $v_i$ 和 $w_i$，它们的**内积**，写成 $\langle v, w\rangle$，定义为:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

两个向量被称作**正交**当且仅当它们的内积是 0.

一组基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 被叫做**正交基**当它们满足 $\forall i, j, i \neq j, \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$，它们被叫做**标准正交基**如果 $\forall i, \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = 1$

在 $\mathbb{R}^n$ 中，如果我们取标准基，那么正交和几何上的垂直是等价的。

使用标准正交基可以简化基底计算。一般地，如果我们要计算一个向量的基底，我们需要解一个线性方程组，但是在标准正交基的前提下，这个过程可以被简化。

具体地，如果 $\mathbf{w} \in V$ 可以被表示成 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k \mathbf{v}_k$. 那么 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_t \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_t \rangle = \alpha_t$. 于是 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$. 因此坐标只需要点积就可以算了，就不用解线性方程组了。

## Definition 6 (向量的模)

一个向量 $\mathbf{u}$ 的模是一个标量，用 $||u||$ 表示，满足以下性质：

1. $||\mathbf{u}|| \geq 0$, 同时 $||\mathbf{u}|| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. 对于每个 $\alpha, \mathbf{u}$, $||\alpha\mathbf{u}|| = |\alpha|||\mathbf{u}||$.
3. 三角不等式:$||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$

经常使用的模长有：$l_p$-模长:$||\mathbf{u}||_p = (\sum_{i=1}^{k} |u_i|^p)^{1/p}$, 当 $p = 2$, 它变成了欧几里得模长: $||\mathbf{u}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} u_i^2}$. 取 $p \to +\infty$, 我们可以得到 $l_\infty$-模长: $||\mathbf{u}||_\infty = \max_{i=1}^{k} |u_i|$.

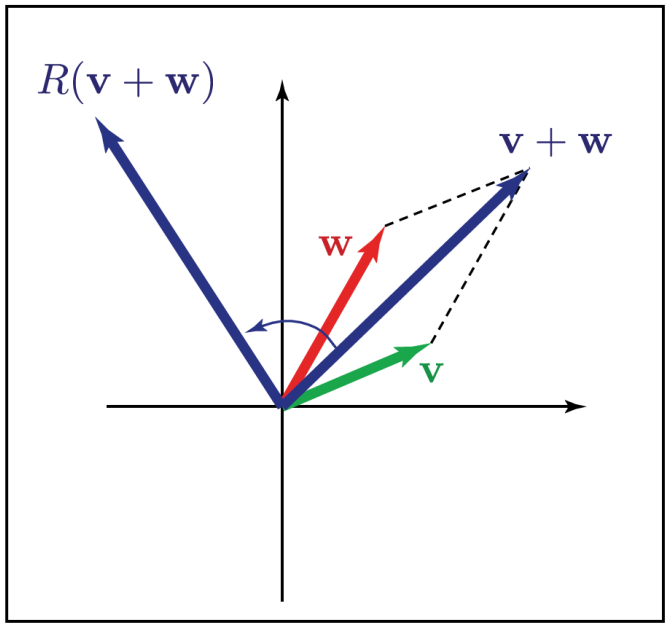
Section 2

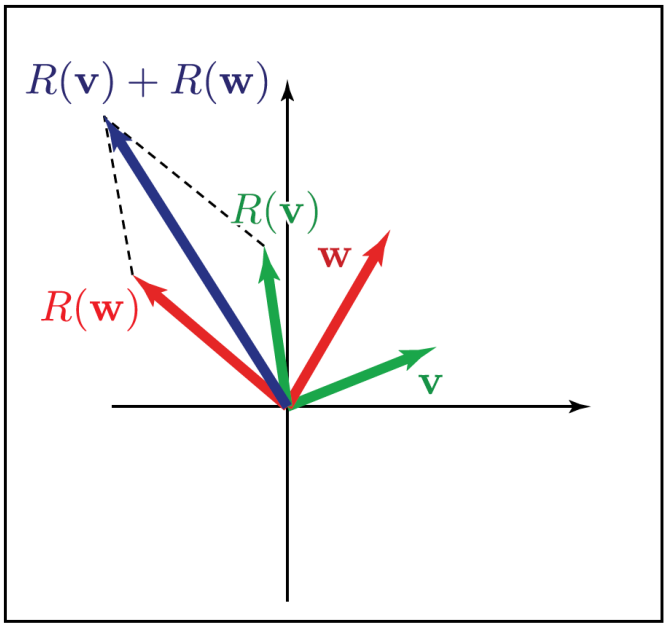
# 线性算子和矩阵

## Definition 7 (线性算子)

**线性算子** $\mathcal{A}$ 是一个函数把线性空间 $V$ 中的元素映射到另一个线性空间 $W$ 中，满足如下性质：

1. $\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathcal{A}\mathbf{v}$
2. $\mathcal{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{u}$



如果一个线性空间维度有限，我们取一组基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$，那么 $\forall \mathbf{w} \in V$，满足 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k \mathbf{v}_k$，那么 $\mathcal{A}w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}\mathbf{v}_i$。因此我们可以根据基的像来唯一确定一个线性算子。此外，如果我们在 $W$ 中取一组基 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m\}$：并将基的像表示成：$\mathcal{A}\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \mathbf{p}_j$，于是 $\mathcal{A}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{k} A_{ij} \alpha_j) \mathbf{p}_j$。用矩阵写出来，就是说 $\mathcal{A}$ 把一个坐标为 $\alpha$ 的点映射到了坐标为 $A\alpha$ 的点。

典型的例子，对于一个三维空间的点 $P(x, y, z)$，要将其绕 $z$ 轴旋转 $\theta$ 角度:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

## Definition 8 (转置)

矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{n\times m}$ 的**转置**，用 $A^T$ 表示。是一个 $m \times n$ 矩阵，把行变成列，把列变成行，i.e., $a_{ij} \mapsto a_{ji}$

我们可以用转置来描述两个向量 **v** 和 **w** 之间的点积:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v^T w$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Definition 9 (奇异/非奇异矩阵, 逆矩阵)**

方阵 $A$ 被称为**非奇异矩阵**若存在一个方阵 $B$ 满足 $AB = BA = I$, 否则我们称 $A$ 是**奇异矩阵**.

如果 $A$ 非奇异, 那么 $B$ 被叫做 $A$ 的**逆矩阵**，写成 $A^{-1}$.

显然如果 $A$ 非奇异 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的行线性无关和 $A$ 的列线性无关。奇异这个概念和线性方程组的解有关系，如果 $A$ 非奇异，那么线性方程组 $Ax = b$ 要么无解，要么解唯一。否则，该方程组要么无解要么有无穷多解。另外，$Ax = 0$ 的解构成了一个子空间，被称为 $A$ 的零空间。

## Definition 10

**特征值与特征向量**

向量 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 被称为 $A$ 的**特征向量**如果 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, 同时 $\lambda$ 被叫做 $\mathbf{v}$ 的**特征值**.

一个特征向量形成了一个在 $A$ 变换下保持不变的轴. 具有相同特征值的特征向量形成了一个子空间: 若 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, 那么 $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

怎么找到所有特征项向量？考虑若 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ 有非零解, 等价于 $(A - \lambda I)$ 奇异, 因此 $\det(A - \lambda I) = 0$, 因此所有特征值是关于 $\lambda$ 的多项式 $\det(A - \lambda I)$ 的解集. 这个多项式被叫做 $A$ 的 **特征多项式**

矩阵 $A$ 的所有特征值被叫做 $A$ 的 **谱**。在计算机图形学中有很多根据谱进行分析的算法。

数院邵嗣烘老师本学期开设谱方法的课程，大家可以去旁听。(很遗憾和算分时间冲突)

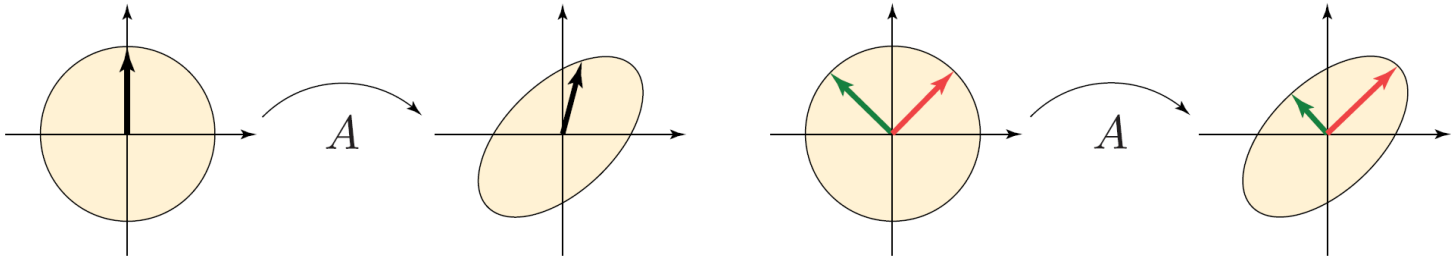
## Definition 11

**可对角化的矩阵** 矩阵 $A$ 称作**可对角化**当且仅当它有 $n$ 个线性无关的特征向量。

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^{-1}$$

如果 $A$ 可对角化，他的特征向量可以形成全空间的一组基 $B$。如果我们用这个基底去看待变换 $A$ 的话，我们发现 $A$ 不过是在每个轴上面做放缩罢了。



## Definition 12 (正交矩阵)

矩阵 $A$ 被叫做**正交矩阵**如果 $AA^T = A^TA = I$.

如果 $A$ 是正交矩阵，那么 $A$ 的行和列都形成了全空间的一组标准正交基。另外，$A$ 这个变换保持内积不变：$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = (A\mathbf{v})^T(A\mathbf{w}) = \mathbf{v}^TA^TA\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$。同时，$||Av||_2 = ||v||_2$.

在 $\mathbb{R}^3$ 中，每个正交矩阵要么对应着旋转变换，要么对应着旋转反射变换（以某直线作为旋转轴，将某物体对该轴做旋转后，再将该物体对垂直于该轴的平面做反射）。

## Definition 13 (对称矩阵)

矩阵 $A$ 被叫做**对称矩阵**如果 $A = A^T$。

## Definition 14

**正规矩阵**

矩阵 $A$ 被叫做**正规矩阵**如果 $AA^T = A^TA$,

如果 $A$ 对称, 那么 $A$ 有 $n$ 个线性无关且两两正交的单位特征向量，它们形成了 $V$ 的一组基. 因此变换 $A$ 可以在几何上被描述成：先进行一系列旋转和翻转，然后对每个分量放缩，最后根据前面的变换一一作逆变换变回来。

正规矩阵是对称矩阵的推广. 可以证明正规的 $n \times n$ 矩阵在 $\mathbb{C}$ 上可对角化。

对于不可对角化的矩阵，单单是特征值和特征向量不够描述这个变换，在第 4 章我们利用 SVD 可以给出对于一般的线性变换的行为。

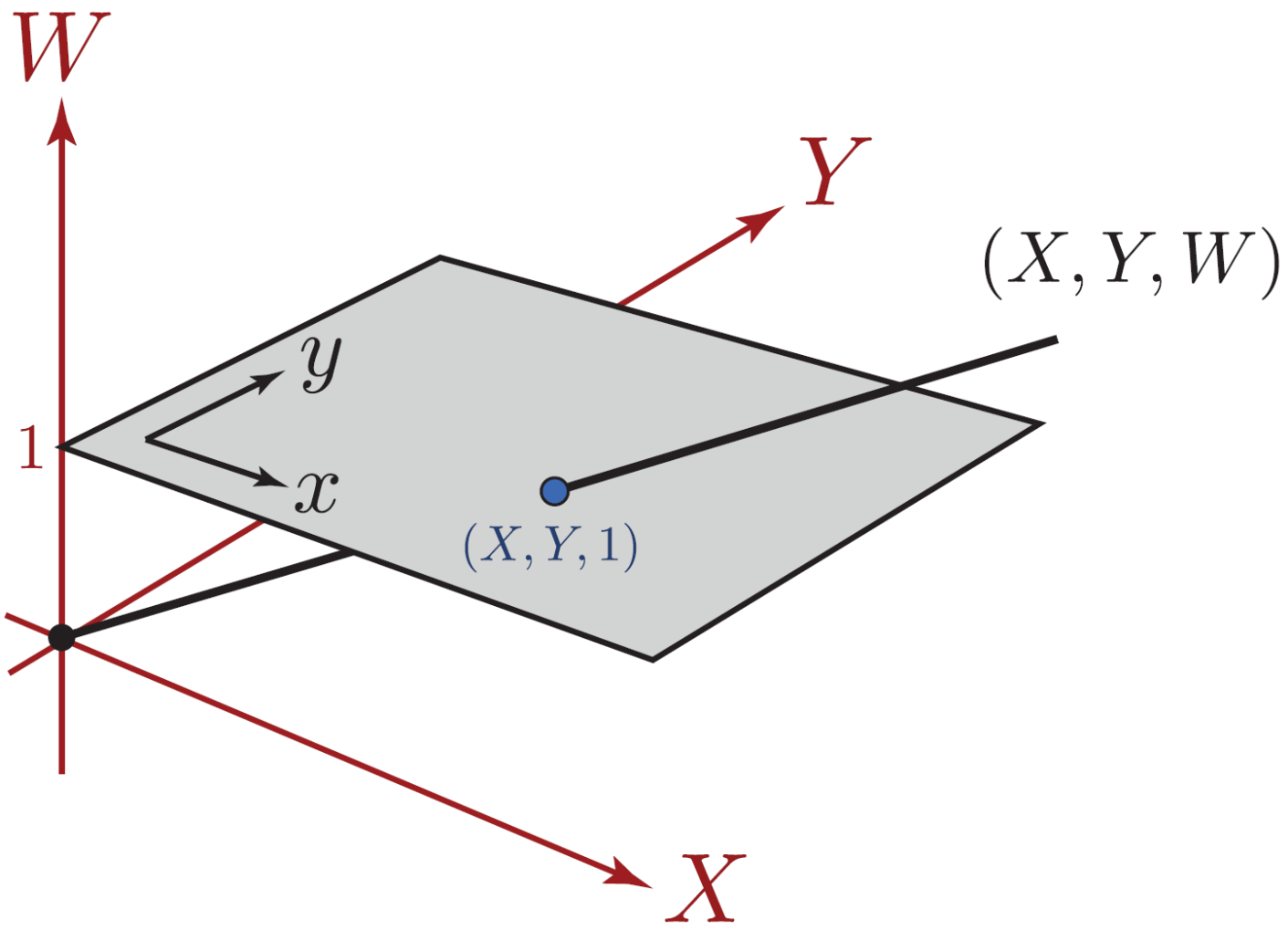
Section 3

# 应用

接下来，我们介绍一下线性代数在计算机图形学中的一些应用。这些应用主要集中在三个方面：1. 计算机图形学需要在二维 (三维) 空间中对几何形体进行一系列操作，而这些操作都可以用矩阵来描述。2. 在图像处理中，利用线性变换可以提取出图像的各个性质。3. 一些在图形学中常用的算法，比如 PCA,SVD，都需要用到矩阵的知识。考虑到与后面知识的重合程度，我们这里介绍第一个方面。

平移不是线性变换，因为它不把 **0** 映射到 **0**。但是我们可以简单的修改坐标让他变成线性变换。这个技术在图形学中被广泛使用，叫做**齐次坐标**。

齐次坐标把 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点映射到 $\mathbb{R}^{n+1}$。为了描述这个做法，我们举 $n=2$ 的例子。我们把 $(x,y)$ 映射到 $(x,y,C)$, $C$ 是一个常数，为了方便我们取 $C=1$, 然后我们在 $(x,y,C)$ 坐标系下面作变换. 最后我们做变换 $(x,y,z)\mapsto(x/z,y/z)$ 把点变换回来。


$W$
$Y$
$(X, Y, W)$
$y$
$1$
$x$
$(X, Y, 1)$
$X$

考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的平移变换，我们把 $(x, y, 1)$ 映射到 $(x+a, y+b, 1)$. 这是线性变换，因为它可以被下面这个矩阵描述：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从本质上来讲，我们并没有考虑整个 $\mathbb{R}^3$ 空间，而是考虑了它在等价关系：$(x, y, z) \sim (tx, ty, tz)$ 下面的所有等价类。

放缩是图形学中的基本变换，它将一个点 $(x, y, 1)$ 映射到 $(cx, cy, 1)$ 写成矩阵就是：

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

旋转变换是图形学中一类重要的变换。我们在切换视角，模拟运动等过程中都要用到这类变换。

我们想要计算一个点 $(x, y)$ 绕原点逆时针旋转 $\varphi$ 后的坐标，设它的极坐标是 $(r, \theta)$. 那么旋转后坐标就是 $(r, \varphi + \theta)$. 变换回来就是 $(r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta)$, 利用三角公式展开可以得到 $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. 写成齐次坐标 + 矩阵就是:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

现在计算将一个凸多边形绕着质心进行旋转。首先我们利用平移，将多边形的质心移动到原点，然后执行绕原点旋转的操作，最后再评平移回去就行了。

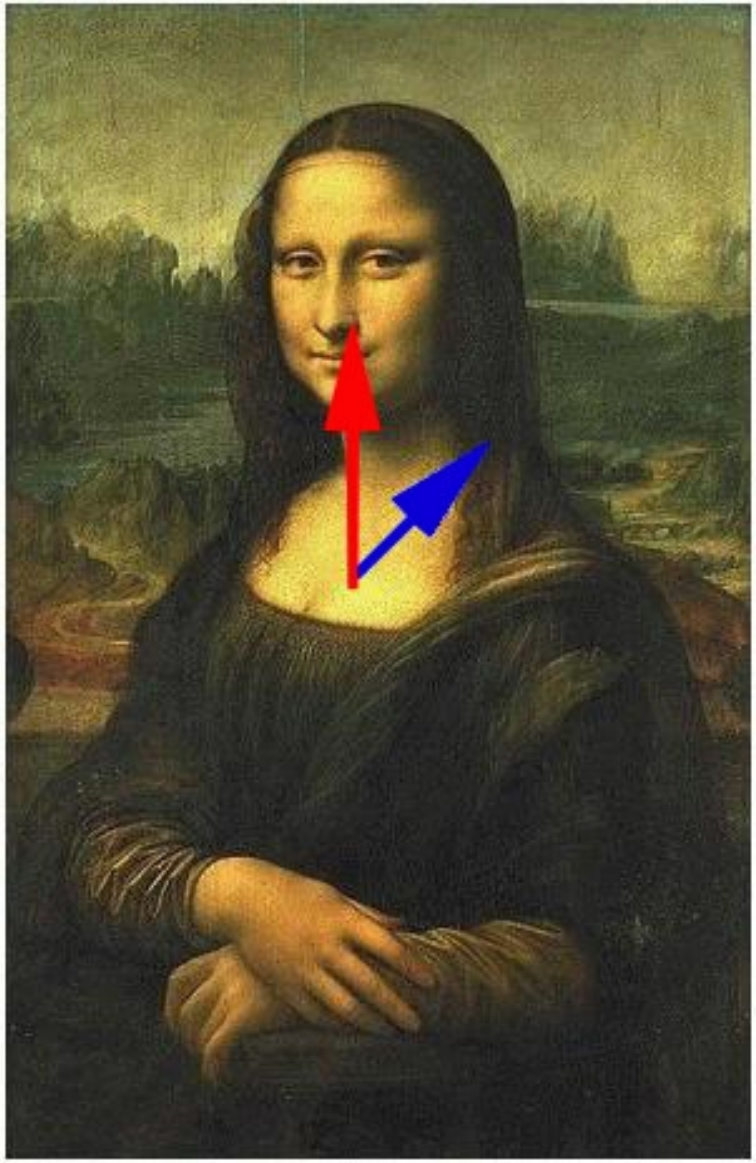
反射变换在图形学中也很常见，比如计算光线的轨迹。

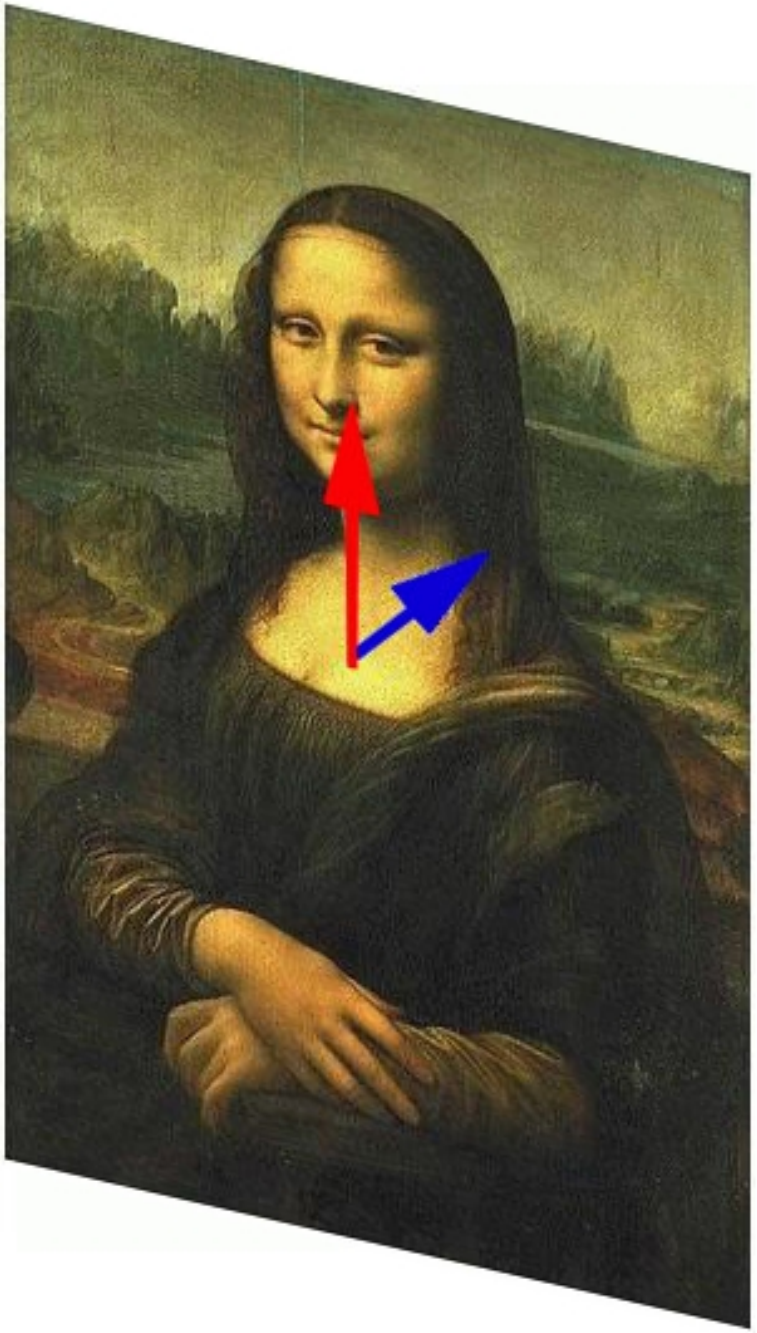
计算一个点对 $y$ 轴的反射就是把 $(x, y, 1)$ 映射到 $(-x, y, 1)$. 也就是:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于一般的二维反射变换，我们只需先将这个反射轴旋转到 $y$ 轴，然后使用对 $y$ 轴反射的变换，然后变换回来就好了。

剪切变换也是一类线性变换，分为两种：x-剪切和 y-剪切。



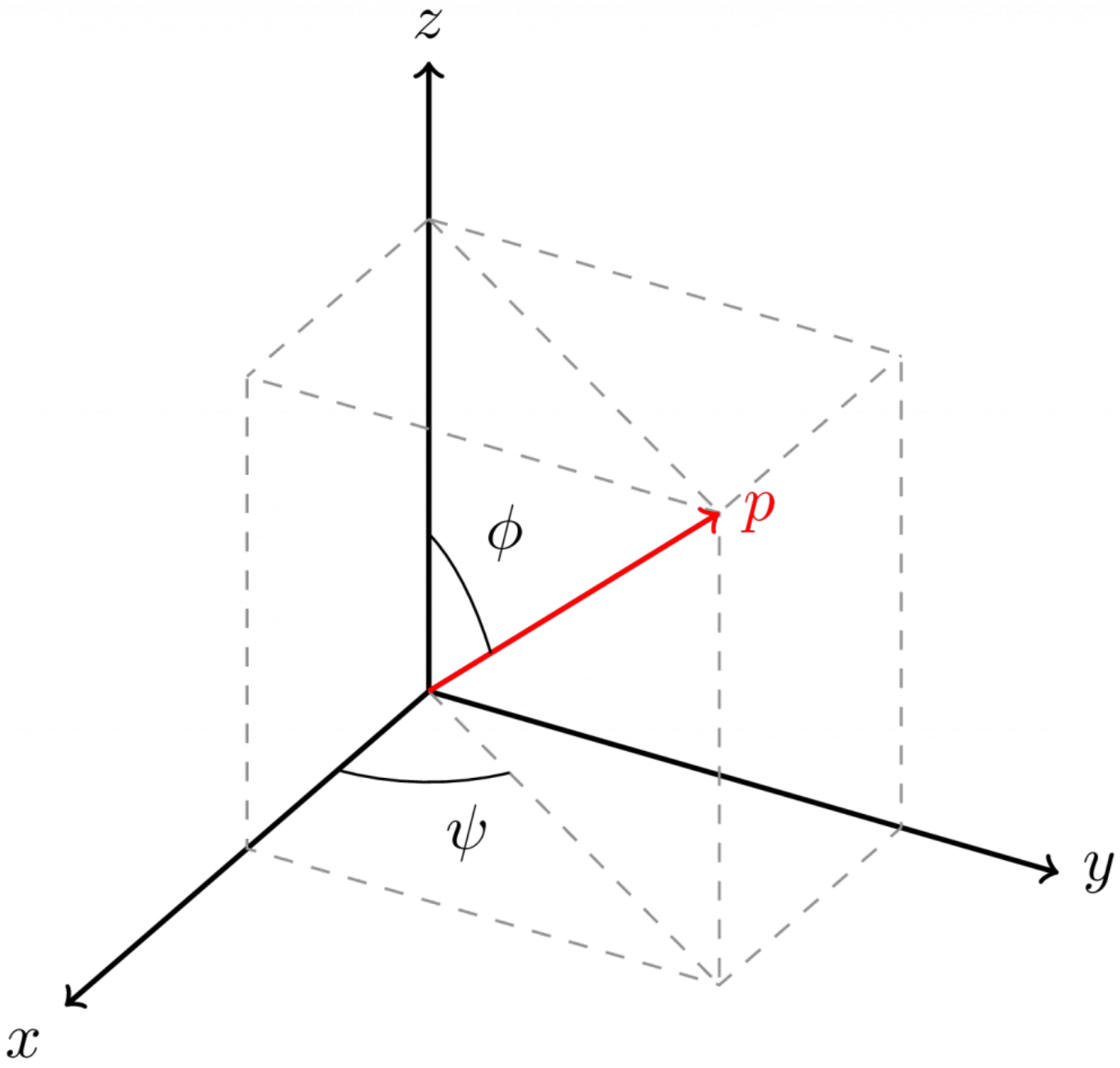


x-剪切将 $(x, y, 1)$ 映射到 $(x + ky, y, 1)$，写成矩阵如下。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y-剪切将 $(x, y, 1)$ 映射到 $(x, y + kx, 1)$，写成矩阵如下。

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


$z$
$p$
$\phi$
$\psi$
$y$
$x$

先考虑一个简单的情形：绕 $z$ 轴的旋转，也就是计算一个点 $(x, y, z, 1)$ 绕 $z$ 轴逆时针旋转 $\theta$ 后的坐标。首先这个点的 $z$ 坐标没有改变。其次，这个点的 $x, y$ 分量的改变情况等价于在二维平面上绕着原点旋转 $\theta$，因此可以写出矩阵。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

类比可得，绕 $y$ 轴旋转 $\gamma$ 的矩阵可以写成：

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

绕 $x$ 轴类似。

接下来考虑绕任意一个轴旋转 $\theta$。首先，如果这个轴没有经过原点，先进行平移变换 $T_0$ 使得这个轴经过原点。接着设这个轴的方向向量是 $\mathbf{v} = (\cos\alpha\sin\gamma, \sin\alpha\sin\gamma, \cos\gamma)$。我们可以把这个过程进行拆解计算。首先我们进行绕 $z$ 轴的旋转 $T_1$，使得 $\mathbf{v}$ 进入 $xoz$ 平面 (绕 $z$ 轴旋转 $-\alpha$)，接着我们进行 $xoz$ 平面上的旋转 $T_2$ 使得 $\mathbf{v}$ 与 $z$ 轴重合 (绕 $y$ 轴旋转 $-\gamma$)，然后执行绕 $z$ 轴的旋转 $T_3$(绕 $z$ 轴旋转 $\theta$)。最后变换回来。因此最后的答案就是 $T_0T_1T_2T_3T_2^{-1}T_1^{-1}T_0^{-1}$.

接下来考虑三维空间中对任意一个平面做反射。

我们依旧先考虑简单的情况，对 $xoy$ 平面反射，这个变换可以写成 $(x, y, z, 1) \mapsto (x, y, -z, 1)$

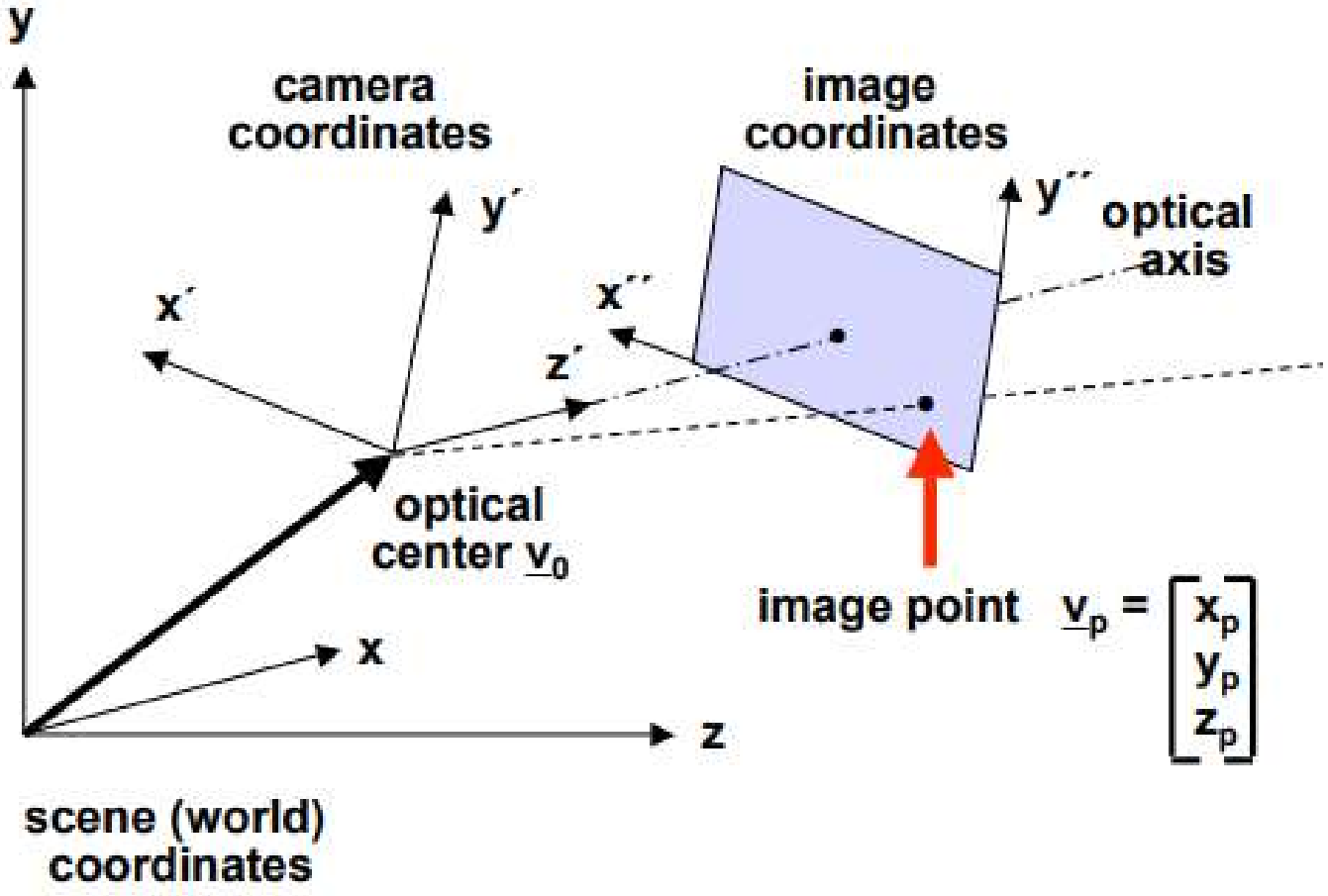
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

如果不是 $xoy$ 平面，我们就先用旋转变换，将这个平面的法向量通过转动和 $z$ 轴重合，此时这个平面通过平移和 $xoy$ 平面重合。

然后调用简单情况下的反射变换就行了。最后我们再变换回去就好了。

之前我们介绍的都是仿射变换，但是在图形学中仿射变换是不够的。比如，我们在拍照的时候，我们需要把照相机中的三维坐标变成照片上的二维坐标。



设照片平面距离是 $F$. 考虑计算一个点 $P(x,y,z)$ 的投影点 $P'(x',y',z')$, 利用相似三角形可以得到: $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z}{F}$, 因此 $x'=\frac{Fx}{z}, y'=\frac{Fy}{z}$, 在齐次坐标下我们可以得到矩阵:

$$\begin{pmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

# 作业

- 矩阵 $A$ 为正交矩阵且 $\det A = -1$，证明 $-1$ 是 $A$ 的一个特征值。

谢谢大家!