前沿计算研究实践（II）	**2019 年春季**

专题 2：线性代数

教授：陈宝权　　作者：孙奕灿

免责声明：该笔记尚未进行正式出版物的通常审查，未经教师允许不能向课程外分发.

2.1 线性空间

2.1.1 基础

在这人我们先介绍一些基本的概念：线性空间和线性子空间以及线性无关的概念。

定义 2.1 线性空间

在域 F 上的**线性空间**是一个集合 V, 上面有加法运算 $+: V \times V \to V$ 和数乘运算 $\cdot: F \times V \to V$，满足以下性质：

1. V 在 $+$ 下构成阿贝尔群。
2. 点积和 F 上加法可以互换: $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u}) = (ab) \cdot \boldsymbol{u}$
3. 点积的单位元: $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, 1 是 F 乘法单位元。
4. 对向量的分配律: $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
5. 对 F 上加法的分配律: $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$

定义 2.2 线性子空间

若 V 是一个线性空间, 称 $W \subseteq V$ 为 V 的**子空间**当以下条件被满足:

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$
2. $\forall \boldsymbol{u} \in W, a \in F, a\boldsymbol{u} \in W$

在图形学中常常被用到的 xy 平面和 xyz 三维空间都是线性空间的简单例子。在 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的一条直线是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，或者都在 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

定义 2.3 线性无关

向量 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ 被称为**线性无关**当且仅当 $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots, \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$

考虑一个线性无关的集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. 根据定义，线性无关意味着 $\mathbf{0}$ 只能被这个集合唯一表出。更一般的，我们可以证明如果 $\mathbf{w}$ 可以被这个集合表出，那么表出方式一定是唯一的。另外，我们可以证 $\forall i, \mathbf{v}_i$ 不能被这个集合中其他向量表示出来。

我们可以进一步定义 $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ 表示所有能被 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 表出的向量集合，它是全空间的一个子空间。

利用线性无关的概念，我们可以定义基，维度和坐标。

定义 2.4 基，维度和坐标

线性空间 V 的一组**基**B 是指 V 中的极大线性无关集合。(极大的意思说是说不存在严格包含 V 的线性无关组。)

线性空间 V 的**维度**就是基集合的大小。(可以证明所有基集合大小相同。)

一个向量 $\boldsymbol{w} \in V$ 在基 $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ 下**坐标**是一组有序的系数 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$，满足 $\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots, \alpha_k\boldsymbol{v}_k$.*(这个系数是唯一的)*

对于基这个概念，一个简单的例子就是在 $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$，这个基被叫做标准基。当然，一些线性空间和基底的组成可能有些不太一样。比如，一个 $N \times M$ 的灰度图可以描述成 $\mathbb{R}^{nm}$ 中的一个向量，我们把每个像素的灰度作为他的坐标。这个坐标对应了 $\mathbb{R}^{nm}$ 中的标准基。

2.1.2 内积

线性空间可以被赋予内积。有了内积，我们可以定义更多的东西，比如正交的概念。

定义 2.5 内积，正交，正交基

两个向量的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，假设他们的坐标分别是 v_i 和 w_i，它们的**内积**，写成 $\langle v, w\rangle$，定义为：

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

两个向量被称作**正交**当且仅当它们的内积是 *0.*

一组基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ 被叫做**正交基**当它们满足 $\forall i, j, i \neq j, \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = 0$，它们被叫做**标准正交基**如果 $\forall i, \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i\rangle = 1$ 也成立。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，如果我们取标准基，那么正交和几何上的垂直是等价的。

使用标准正交基可以简化基地计算。一般地，如果我们要计算一个向量的基底，我们需要解一个线性方程组，但是在标准正交基的前提下，这个过程可以被简化。

具体地，如果 $\mathbf{w} \in V$ 可以被表示成 $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k\mathbf{v}_k$. 那么 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_t \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_t \rangle = \alpha_t$. 于是 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$. 因此坐标只需要点积就可以算了，就不用解线性方程组了。

2.1.3 模

向量是一组数，但是一些对单个数字很直接的概念对向量而言可能并不这么直接。比如说一个数字的大小，我们可以直接定义做他的绝对值。但是一个向量的大小却不好说。着引入模长的概念，他是这么定义的：

定义 2.6 模

一个向量 $\boldsymbol{u}$ 的**模**是一个数字，用 $||u||$ 表示，满足以下性质：

1. $||\boldsymbol{u}|| \geq 0$, 同时 $||\boldsymbol{u}|| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
2. 对于每个 $\alpha, \boldsymbol{u}$, $||\alpha\boldsymbol{u}|| = |\alpha|||\boldsymbol{u}||$.
3. 三角不等式:$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$

经常使用的模长有：l_p-模长:$||\mathbf{u}||_p = (\sum_{i=1}^{k} |u_i|^p)^{1/p}$, 当 $p = 2$, 它变成了欧几里得模长: $||\mathbf{u}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} u_i^2}$. 取 $p \to +\infty$, 我们可以得到 l_∞-模长: $||\mathbf{u}||_\infty = \max_{i=1}^{k} |u_i|$.

2.2 线性算子和矩阵

2.2.1 基础

线性算子在几何操作中十分有用。旋转和放缩都可以写成线性算子的形式。线性算子这么定义：

定义 2.7 线性算子

线性算子 $\mathcal{A}$ 是一个函数把线性空间 V 中的元素映射到另一个线性空间 W 中，满足如下性质：

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathcal{A}\boldsymbol{u} + \mathcal{A}\boldsymbol{v}$
2. $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha\mathcal{A}\boldsymbol{u}$

如果一个线性空间维度有限，我们取一组基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$，那么 $\forall \mathbf{w} \in V$，满足 $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots, \alpha_k\mathbf{v}_k$，那么 $\mathcal{A}w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}\mathbf{v}_i$。因此我们可以根据基的像来唯一确定一个线性算子。此外，如果我们在 W 中取一组基 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m\}$ ：并将基的像表示成：$\mathcal{A}\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\mathbf{p}_j$，于是 $\mathcal{A}\mathbf{w} - \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{k} A_{ij}\alpha_j)\mathbf{p}_j$。用矩阵写出来，就是说 $\mathcal{A}$ 把一个坐标为 α 的点映射到了坐标为 $A\alpha$ 的点。

2.2.2 矩阵

我们在这介绍一些与矩阵有关的概念。

定义 2.8 转置

*矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{n\times m}$ 的**转置**，用 A^T 表示。是一个 $m \times n$ 矩阵，把行变成列，把列变成行，i.e., $a_{ij} \mapsto a_{ji}$*

我们可以用转置来描述两个向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 之间的点积: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v^T w$

定义 2.9 奇异/非奇异矩阵，逆矩阵

*方阵 A 被称为**非奇异矩阵**若存在一个方阵 B 满足 $AB = BA = I$，否则我们称 A 是**奇异矩阵**.*

*如果 A 非奇异，那么 B 被叫做 A 的**逆矩阵**，写成 A^{-1}.*

显然如果 A 非奇异 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的行线性无关和 A 的列线性无关。奇异这个概念和线性方程组的解有关系，如果 A 非奇异，那么线性方程组 $Ax = b$ 要么无解，要么解唯一。否则，该方程组要么无解要么有无穷多解。另外，$Ax = 0$ 的解构成了一个子空间，被称为 A 的零空间。

定义 2.10 特征值与特征向量

*向量 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ 被称为 A 的**特征向量**如果 $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$，同时 λ 被叫做 $\boldsymbol{v}$ 的**特征值**.*

一个特征向量形成了一个在 A 变换下保持不变的轴. 具有相同特征值的特征向量形成了一个子空间: 若 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$，$A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, 那么 $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

怎么找到所有特征项向量? 考虑若 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ 有非零解, 等价于 $(A - \lambda I)$ 奇异, 因此 $\det(A - \lambda I) = 0$, 因此所有特征值是关于 λ 的多项式 $\det(A - \lambda I)$ 的解集. 这个多项式被叫做 A 的**特征多项式**

矩阵 A 的所有特征值被叫做 A 的 **谱**。在计算机图形学中有很多根据谱进行分析的算法。

定义 2.11 可对角化的矩阵 *矩阵 A 称作**可对角化**当且仅当它由 n 个线性无关的特征向量。*

如果 A 可对角化，他的特征向量可以形成全空间的一组基 B。如果我们用这个基底去看待变换 A 的话，我们发现 A 不过是在每个轴上面做放缩罢了。

定义 2.12 正交矩阵

矩阵 A 被叫做**正交矩阵**如果 $AA^T = A^TA = I$.

如果 A 是正交矩阵, 那么 A 的行和列都形成了全空间的一组标准正交基。另外，A 这个变换保持内积不变：$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = (A\mathbf{v})^T(A\mathbf{w}) = \mathbf{v}^TA^TA\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$。同时，$||Av||_2 = ||v||_2$.

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 每个正交矩阵要么对应着绕一个轴的旋转，要么对应着对一个平面的反射。

定义 2.13 对称矩阵

矩阵 A 被叫做**对称矩阵**如果 $A = A^T$。

定义 2.14 正规矩阵

矩阵 A 被叫做**正规矩阵**如果 $AA^T = A^TA$,

如果 A 对称, 那么 A 有 n 个线性无关且两两正交的单位特征向量，它们形成了 V 的一组基. 因此变换 A 可以在几何上被描述成：先进行一系列旋转和翻转，然后对每个分量放缩，最后根据前面的变换一一作逆变换变回来。

正规矩阵是对称矩阵的推广. 可以证明正规的 $n \times n$ 矩阵在 $\mathbb{C}$ 上可对角化。

对于不可对角化的矩阵，单单是特征值和特征向量不够描述这个变换，在第 4 章我们利用 SVD 可以给出对于一般的线性变换的行为。

2.3 齐次坐标

平移不是线性变换，因为它不把 $\mathbf{0}$ 映射到 $\mathbf{0}$。但是我们可以简单的修改坐标让他变成线性变换。这个技术在图形学中被广泛使用，叫做**齐次坐标**。

齐次坐标把 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点映射到 $\mathbb{R}^{n+1}$。为了描述这个做法，我们举 $n = 2$ 的例子。我们把 (x, y) 映射到 (x, y, C), C 是一个常数，为了方便我们取 $C = 1$, 然后我们在 (x, y, C) 坐标系下面作变换. 最后我们做变换 $(x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 把点变换回来。

考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的平移变换, 我们把 $(x, y, 1)$ 映射到 $(x + a, y + b, 1)$. 这是线性变换，因为它可以被下面这个矩阵描述：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从本质上来讲，我们并没有考虑整个 $\mathbb{R}^3$ 空间, 而是考虑了它在等价关系: $(x, y, z) \sim (tx, ty, tz)$ 下面的所有等价类。另外，每一个在仿射变换 $\mathbb{R}^n$ 保持了在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 $C = 1$ 平面（如果我们考虑齐次坐标）。

参考文献

[Daniel Cohen-Or] , A Sampler of Useful Computational Tools for Applied Geometry, Computer Graphics, and Image Processing (1997), pp. 1–12.