前沿计算研究实践（II）	**2019 年春季**

专题 1：解析几何

教授：陈宝权　　作者：黄致焕

免责声明：该笔记尚未进行正式出版物的通常审查，未经教师允许不能向课程外分发。

1.1 解析方法

1.1.1 点和向量

定义 1.1 点

点指定空间中的位置。我们用粗体字母表示点：$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 等。

定义 1.2 向量

向量指定方向和大小，如速度。它们在空间中没有特定的位置。我们也用粗体字母表示向量：$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 等。

定义 1.3 向量和点之间的运算

将向量 $\boldsymbol{v}$ 和点 $\boldsymbol{p}$ 相加会产生另一个点 $\boldsymbol{q}$，这是点 $\boldsymbol{p}$ 在向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向上移动向量 $\boldsymbol{v}$ 大小距离的结果。

定义 1.4 两个向量之间的运算

我们可以将两个向量加起来，结果是另一个向量。向量加法是通过著名的平行四边形规则定义的。我们也可以利用向量取反操作来计算向量减法。

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$$

定义 1.5 两个点之间的运算

我们可以将两个点相减，$\boldsymbol{q}$ - $\boldsymbol{p}$ 的结果是一个向量。这个向量的大小是两点之间的距离，其方向是从点 $\boldsymbol{p}$ 到点 $\boldsymbol{q}$。

注意：点之间的加法没有被定义！由于点是位置，因此将他们相加没有意义。

1.1.2 点积

定义 1.6 点积

向量点积的定义如下。给定两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 以及两个向量之间的角度 θ,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\| \cdot \cos\theta$$

定理 1.7 投影

定义 l 表示向量 $\boldsymbol{w}$ 向向量 $\boldsymbol{v}$ 投影的长度。我们有 $\cos\theta = \frac{l}{\|\boldsymbol{w}\|}$, 可以推出

$$l = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\|\boldsymbol{w}\|}$$

定理 1.8 二维中的垂直

在二维中，有一个有用的性质。如果 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$, 那么这两个向量是垂直的。

此外，我们可以计算向量 $\boldsymbol{v} = (x_v, y_v)$ 的垂直向量，有 $\boldsymbol{v}^{\perp} = (-y_v, x_v)$。

1.1.3 直线的表示形式

定义 1.9 直线的表示形式

一条直线可以被表示为 $l(t) = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{v}$ 的形式, 这条直线的源点为 $\boldsymbol{p}_0$, 其中 $t = 0$; 其中参数值为任意实数，即 $t \in (-\infty, \infty)$。当我们讨论射线而不是直线时，则有 $t > 0$。

定理 1.10 点和直线之间的距离

我们可以得到点 $\boldsymbol{q}$ 和直线 $l(t) = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{v}$ 之间的距离。

首先我们在直线 l 上找到点 $\boldsymbol{q}'$ 满足 $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}'$ 垂直于向量 $\boldsymbol{v}$, 并且点 $\boldsymbol{q}$ 和直线 l 之间有 $dist(\boldsymbol{q}, l) = \|\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}\|$

让我们用点积形式表示它:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}', v \rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{v}, v \rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{v} \rangle - t\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= 0
\end{aligned}$$

可以解出 t 的值:

$$t = \frac{\langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

现在我们可以应用毕达哥拉斯公式来得到

$$dist^2(\boldsymbol{q}, l) = \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0\|^2 - t^2$$

定理 1.11 点和平面之间的距离

首先给定一个法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面 Π 。

给定一个点 $\boldsymbol{q}$, 它到平面的距离为 $\|\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}\|$, 其中点 $\boldsymbol{q}$' 是点 $\boldsymbol{q}$ 沿法向量 $\boldsymbol{n}$ 向平面的投影。

因为向量 $\boldsymbol{q}$' - $\boldsymbol{q}$ 和向量 $\boldsymbol{n}$ 平行, 所以 $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} + \alpha\boldsymbol{n}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$

任取平面 Π 上的点 $\boldsymbol{p}_0$, 有

$$\langle \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n} \rangle = 0$$

替换 $\boldsymbol{q}$' 我们可以得到

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{q} + \alpha\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n} \rangle &= 0 \\ \langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0, n \rangle + \alpha\langle n, n \rangle &= 0 \\ \alpha &= \frac{\langle \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{q}, n \rangle}{\|n\|^2} \end{aligned}$$

因此有

$$dist^2(\boldsymbol{q}, \Pi) = \|\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}\|^2 = \alpha^2\|\boldsymbol{n}\|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{n} \rangle^2}{\|\boldsymbol{n}\|^2}$$

定理 1.12 三维中两条直线之间的距离

令 l_1 和 l_2 是三维中给定的两条直线*:*

$$\begin{aligned} l_1(s) &= \boldsymbol{p}_1 + s\boldsymbol{u} \\ l_2(t) &= \boldsymbol{p}_2 + t\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

令两条直线之间的距离为直线 l_1 上的点 $\boldsymbol{q}_1$ 和直线 l_2 上的点 $\boldsymbol{q}_2$ 之间的距离。所以有 $(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) \perp \boldsymbol{u}$ 并且 $(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) \perp \boldsymbol{v}$。我们可以用参数 s 和 t 来表示点 $\boldsymbol{q}_1$ 和点 $\boldsymbol{q}_2$*:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= l_1(s) = \boldsymbol{p}_1 + s\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{q}_2 &= l_2(s) = \boldsymbol{p}_2 + t\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

向量 $\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2$ 垂直于向量 $\boldsymbol{u}$ 和向量 $\boldsymbol{v}$*:*

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + s\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle &= 0 \\ \langle \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + s\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

得到*:*

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{u} \rangle + s\|\boldsymbol{u}\|^2 - t\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle &= 0 \\ \langle \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{v} \rangle - t\|\boldsymbol{v}\|^2 + s\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

因此, 我们得到了两个方程和两个变量，可以解出 $\tilde{s}$ 和 $\tilde{t}$ 的值:

$$\tilde{s} = \frac{\beta\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle - \|\boldsymbol{v}\|^2\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - \beta^2}$$
$$\tilde{t} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|^2\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle - \beta\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - \beta^2}$$

其中 $\beta = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$ ，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$。最后，我们得到

$$dist(l_1, l_2) = \|l_1(\tilde{s}) - l_2(\tilde{t})\|$$

1.1.4 叉积

定义 1.13 叉积

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\alpha \hat{\boldsymbol{n}}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是一个单位向量，垂直于包含向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的平面, 并且 $\sin\alpha$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 较小夹角的正弦值 $(0 \le \alpha \le 2\pi)$.

注意: 两个向量的叉积结果为一个向量!

向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 可以由行列式计算:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = det \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 是形成正交右手坐标系的单位向量, 并且 $\boldsymbol{a} = a_1\hat{\boldsymbol{i}} + a_2\hat{\boldsymbol{j}} + a_3\hat{\boldsymbol{k}} = (a_1, a_2, a_3)$,$\boldsymbol{b} = b_1\hat{\boldsymbol{i}} + b_2\hat{\boldsymbol{j}} + b_3\hat{\boldsymbol{k}} = (b_1, b_2, b_3)$

定理 1.14 通过三个非共线点定义平面

我们可以通过三个非共线点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 来定义一个平面。方差为 $ax + by + cz + d = 0$ 的平面有法向量 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$. 法向量的方向等于叉积 $(p_1 - p_2) \times (p_1 - p_3)$ 的结果, 并且 d 的值可以通过将其中一个点的值插入平面方程来确定。

定理 1.15 平面的线性变换

给定变换 T 和平面 $ax + by + cz + d = 0$。我们可以计算平面变换后的方程。

一个简单的想法是重新计算点 $T(\boldsymbol{p}_1)$, $T(\boldsymbol{p}_2)$ 和 $T(\boldsymbol{p}_3)$ 构成的平面。

我们令 $\boldsymbol{a} = (a, b, c, d)$ ，$\boldsymbol{x} = (x, y, z, 1)$, 那么我们有 $a^\top x = 0$。变换后的平面有 $\boldsymbol{a}' = (a', b', c', d')$ 并且满足 $\boldsymbol{a}'^\top T x = 0$。我们可以将 $a^\top x = 0$ 写成

$$\boldsymbol{a}^\top T^{-1} T \boldsymbol{x} = 0$$

我们得到

$$\boldsymbol{a}'^\top = \boldsymbol{a}^\top T^{-1}$$

或

$$\boldsymbol{a}' = T^{-\top} \boldsymbol{a}$$

参考文献

[Daniel Cohen-Or] , A Sampler of Useful Computational Tools for Applied Geometry, Computer Graphics, and Image Processing (1997), pp. 1–12.